

# Diseño vía LMIs del generador difuso de residuales para detección de fallas en un sistema de nivel de tres tanques

Efraín Alcorta García<sup>1</sup> y Salvador Saucedo Flores<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Posgrado FIME-UANL; C.U. San Nicolás de los Garza, N. L. [alcorta@iecc.org](mailto:alcorta@iecc.org)

<sup>2</sup> ESIME Z.-IPN Edif. 5 3er piso, UPALM, Deleg. GAM, D. F. [ssaucedo@iecc.org](mailto:ssaucedo@iecc.org)

**Resumen.** Una de las dificultades para detectar y aislar fallas en sistemas no lineales a través de métodos basados en observadores es el diseño del generador de residuales. En este trabajo se propone un procedimiento para resolver el problema de la detección y el aislamiento de fallas en sistemas no lineales. El resultado se obtiene al derivar varios subsistemas, cada uno de los cuales contiene información acerca de fallas específicas, de la planta en consideración. El modelado Takagi-Sugeno se usa para diseñar los observadores difusos y generar los residuales. Una de las ventajas del método es que el diseño es laxo. Además, se refuerza el uso potencial de técnicas de desacoplo. La metodología del diseño se basa en desigualdades lineales de matrices (LMIs) y se ilustra usando un sistema de laboratorio de tres tanques.

**Abstract.** One of the difficulties to detect and isolate faults in nonlinear systems via observer based methods is the design of a residual generator. In this work a procedure to approach the fault detection and isolation problem in nonlinear systems is proposed. The result is obtained by deriving several subsystems, each of them containing information about specific faults, from the plant under consideration. Takagi-Sugeno modeling is used to design fuzzy observers and to generate residuals. The detection and isolation tasks is solved by evaluating these residuals. The advantage of the proposed approach is the relaxed condition design for the observers. In addition, the potential use of decoupling techniques is reinforced. Intense use of linear matrix inequalities (LMI) was necessary for the design. A three tank level system illustrates the methodology.

**Keywords:** Fault detection, nonlinear systems, fuzzy logic, Takagi-Sugeno, linear matrix inequalities (LMI).

## Introducción

Los componentes de un sistema físico (incluyendo transductores y actuadores) están sujetos a cambios inesperados, o fallas, las que producen desviaciones desde las condiciones nominales. Para mantener confiable al sistema y económicamente rentable se ha realizado una gran cantidad de investigación en el campo de diagnóstico de fallas, como se puede ver en [3]. Muchos de los métodos realizan la detección de fallas y el aislamiento de las mismas en dos pasos: primero, señales que

sólo dependen de las fallas son generadas. Dichas señales se les llama residuales; y el segundo paso, que consiste en la evaluación de los residuales, esto es, obtener información acerca de las fallas.

Uno de los métodos más efectivos para la generación de residuales se basa en observadores [4]. La idea básica para obtener el residual es comparar la salida medida actual del sistema y el valor nominal (calculada con la ayuda de observadores). Notemos que si el sistema en consideración es no lineal, el observador requerido pudiera ser también no lineal.

En general, el diseño de observadores no lineales no es tarea fácil, incluso si el sistema no lineal es completamente conocido. Para evitar las dificultades relativas al diseño del observador, se puede usar un método no basado en observadores [2], o bien usar otro tipo de observadores [5]. El método en [2] tampoco requiere un modelo matemático de la planta, en cambio, sub modelos basados en identificación se obtienen a través de datos experimentales. Si un modelo de la planta está disponible, el método de [5] se puede usar. Empero, el método considerado en [5] usa observadores Takagi-Sugeno y evaluación difusa. Un tratamiento diferente se aplica en este trabajo. Aquí también se emplean observadores Takagi-Sugeno para obtener los residuales, sin embargo, los residuales generados son procesados en la manera clásica, ie, como los residuales generados con observadores no lineales. El esquema propuesto permite usar el método para desacoplamiento no lineal en conexión con la generación de residuales. Ello representa una ventaja, porque normalmente el método de desacoplamiento produce subsistemas muy complicados y un observador no lineal no es fácil de diseñar.

Este trabajo se presenta como sigue: En la sección 2 se explican algunos antecedentes; el método propuesto se presenta en la sección 3; Un ejemplo de aplicación se halla en la sección 4 y las conclusiones se dan en la sección 5. El apéndice A revela detalles del diseño.

## **1. Antecedentes**

Se revisarán algunos conceptos relevantes para este trabajo. Primero, se presentan los conceptos de detección de fallas y de aislamiento de fallas. Luego se muestra el modelado Takagi-Sugeno de sistemas no lineales y el diseño del observador en dicho contexto.

### **1.1 Generación de Residuales para Detectar y Aislar Fallas**

Como se dijo, la detección y el aislamiento de fallas se llevan al cabo en dos pasos [3]:

1. **Generación de residuales.** El primer paso consiste en la obtención de señales que son sensibles sólo a las fallas. Estas señales son llamadas *residuales*. En forma ideal, los residuales deben ser cero en el caso libre de fallas y diferentes

de cero en otro caso. Un residual puede ser formado como la diferencia de la medición actual de la salida y de un estimado del valor nominal de la salida. Ver por ejemplo la figura 1. En tal figura el residual es generado usando un observador no lineal. Este observador se diseña en base al modelo nominal, esto es, para el sistema libre de fallas.

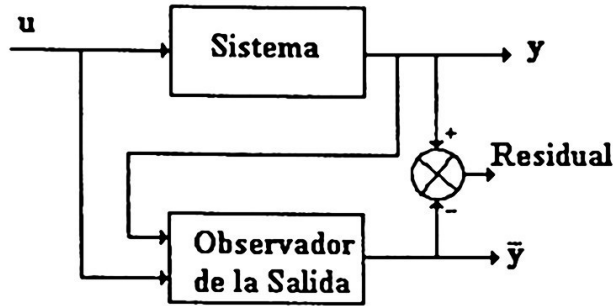


Fig. 1. Generación del residual.

2. **Evaluación de residuales.** En este paso, la información de las fallas contenida en el residual es extraída. Esta operación se realiza generalmente usando normas de las señales y un umbral que permita evitar falsas alarmas.

### 1.1. Desacoplamiento de fallas

La idea fundamental es encontrar una transformación (quizá no lineal) de modo que se logre sensibilidad a una falla específica. Ver la figura 2. El procedimiento usado fue propuesto en [6], ver también [1].

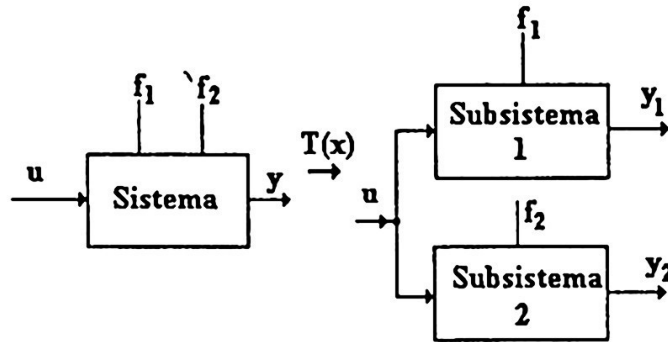


Fig. 2. Desacoplamiento de fallas

Considerar un sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{x})\mathbf{f}_1 + \mathbf{E}_2(\mathbf{x})\mathbf{f}_2 \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  es el vector de estado del sistema;  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^m$  es el vector de salida;  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^p$  es el vector de entrada  $\mathbf{f}_1 \in \mathcal{R}^{s1}$  es el vector de fallas a ser detectadas;  $\mathbf{f}_2 \in \mathcal{R}^{s2}$  es el

vector de fallas sin interés;  $f(x)$  y  $h(x)$  son funciones vectoriales de dimensión adecuada;  $g(x)$ ,  $E_1(x)$  y  $E_2(x)$  son funciones matriciales de dimensión apropiada. La idea básica del desacoplamiento es hallar una transformación  $T(x)$  tal que

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} E_1(x) = 0 \quad (3.a)$$

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} E_2(x) \neq 0 \quad (3.b)$$

Para satisfacer las condiciones (3) algunos elementos del vector de estado  $x$  deberían ser eliminados. Los estados eliminados deben ser recuperados a partir de la salida del sistema, es decir, la condición

$$\text{rango} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} T(x) \\ h(x) \end{bmatrix} \right\} = \dim x \quad (4)$$

debe ser satisfecha. La existencia de una transformación que satisfaga las condiciones (3) y (4) es garantizada por el teorema de Frobenius.

### 2.3 Modelado Takagi-Sugeno de Sistemas

Los métodos para detectar fallas basados en observadores dependen del modelo. Si el modelo del sistema en consideración es complejo, el diseño de un buen generador de residuales pudiera ser también difícil, aun si las no linealidades son perfectamente conocidas. Una manera de superar las dificultades del diseño es el uso del así llamado modelo Takagi-Sugeno. Las trayectorias no lineales son en cierto modo linealizadas alrededor de algunos puntos de operación. El conjunto de modelos lineales son usados para realizar una interpolación difusa para conseguir una aproximación del comportamiento del sistema no lineal [7].

En cierto punto de operación se define una regla **IF THEN**, la cual representa una relación local de salida/entrada del sistema no lineal. La regla para describir la situación puede ser como:

**Regla  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ )**

**IF  $z(t)$  es  $M_i$**

$$\text{THEN} \begin{cases} \dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}$$

Donde  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $y \in \mathcal{R}^m$ ,  $u \in \mathcal{R}^p$  y  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  son matrices de dimensiones compatibles. El vector  $z(t)$  es llamado la variable premisa, que se supone disponible,  $M_i$  es un conjunto difuso y  $r$  es el número de reglas **IF-THEN** para linealizar.

El modelo Takagi-Sugeno del sistema no lineal (1) viene dado por las siguientes fórmulas:



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i[\mathbf{z}(t)] \{ \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \} \quad (5.a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{j=1}^r \omega_j[\mathbf{z}(t)] \mathbf{C}_j \mathbf{x}(t) \quad (5.b)$$

donde  $\omega_i[\mathbf{z}(t)]$  es el grado de pertenencia de la variable premisa  $\mathbf{z}(t)$  o el producto T-norma de grados de pertenencia (si  $\mathbf{z}(t)$  tiene dos o más componentes). Notar que el grado de pertenencia debe cumplir con las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^r \omega_i[\mathbf{z}(t)] = 1 \quad (6)$$

$$0 \leq \omega_i[\mathbf{z}(t)] \leq 1 \quad i = 1, \dots, r \quad (7)$$

## 2.4 Observadores difusos

Existen varios procedimientos para el diseño de observadores difusos para sistemas Takagi-Sugeno. La técnica de [5] será la considerada aquí. Considerar un sistema no lineal (1) y su modelo Takagi-Sugeno correspondiente dado por (5), la estimación del estado es una combinación no lineal difusa de las salidas de observadores lineales locales. La dinámica completa del observador es una suma ponderada de los observadores individuales:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^r \omega_i[\mathbf{z}(t)] \{ \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mathbf{L}_i (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \} \quad (8.a)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^r \omega_j[\mathbf{z}(t)] \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (8.b)$$

El observador dado arriba se basa en la *compensación paralela distribuida* (PDC) [10]. Ello implica que los pesos  $\omega_i[\mathbf{z}(t)]$  son los mismos que aplica el modelo Takagi-Sugeno del sistema no lineal. Un observador difuso debe satisfacer:

$$\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  denota el estimado del vector de estado mediante el observador difuso. La convergencia del error de estimación se analiza usando el siguiente resultado:

**Teorema 1** [9]. El observador difuso (8) es estable de manera asintótica si existen dos matrices positivas definidas  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $r$  matrices  $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_r$  tales que:

$$-\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A}_i + \mathbf{C}_i^T \mathbf{N}_i^T + \mathbf{N}_i \mathbf{C}_i - (s-1)\mathbf{Q} - 2\alpha \mathbf{W} > 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& -A_i^T P - P A_i - A_j^T P - P A_j + C_i^T N_j^T + N_j C_i \\
& + C_j^T N_i^T + N_i C_j + 2P - 4\alpha Q \geq 0 \quad (i < j) \quad (10)
\end{aligned}$$

para todas las  $i$  y  $j$  exceptuando los pares  $(i, j)$  tales que  $\omega_i[z(t)] \omega_j[z(t)] = 0$  para todo valor de tiempo,  $s > 1$  es el número máximo de reglas que se disparan en todo valor de  $t$  y  $\alpha$  es la tasa de decaimiento deseada.

El diseño del observador consiste en calcular las ganancias  $L_i$  de las partes consecuentes de las reglas para el observador. Dichas ganancias se calculan, tras resolver de modo iterativo las LMIs (9) y (10), mediante:

$$L_i = N_i P^{-1} \quad (11)$$

0

### 1 Acotamiento de la salida del observador

Si suponemos que la condición inicial  $x(0)$  es conocida, la restricción

$$\|\hat{x}(t)\|_2 \leq \upsilon$$

es forzada en todo momento  $t \geq 0$  si las LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} X & N_i \\ N_i^T & \upsilon^2 I_p \end{bmatrix} \geq 0, (i = 1, 2, \dots, r) \quad (13)$$

son satisfechas.

### 3. Procedimiento propuesto

La solución al problema de detección y aislamiento de fallas es frecuentemente hecha en dos pasos, como se comentó en la sección anterior. La generación de residuales con sensibilidad a fallas específicas requiere primero una etapa de desacoplamiento. Un problema habitual con las técnicas de desacoplamiento es que los subsistemas resultantes son muy no lineales y un observador para estos subsistemas no siempre es fácil de diseñar.

La observación y el modelado Takagi-Sugeno es un método versátil para resolver el problema de la generación de residuales de sistemas muy no lineales. Si el modelo Takagi-Sugeno de un sistema no lineal existe, se puede diseñar un observador para tal

sistema. La estabilidad de la dinámica del error de estimación y la tasa de convergencia a cero de dicho error se garantizan mediante la selección adecuada de las matrices de ganancia del observador ( $L_i$ ). Las técnicas postmodernas de programación no lineal permiten resolver las LMIs (9) y (10) [agregando si así se desea las (12) y (13) para acotar la salida] de modo iterativo, para luego calcular tales ganancias con (11).

El esquema presentado consiste en la aplicación de las ideas clásicas de detección de fallas a sistemas no lineales. La diferencia fundamental con las técnicas tradicionales es la forma de obtener los residuales, pues en este caso los residuales se obtienen usando observaciones construidas con modelos Takagi-Sugeno del sistema no lineal. El procedimiento se resume como:

1. Seleccionar un grupo de fallas de interés. Las fallas que no interesan se pueden tomar como señales indeseables o fallas ligeras del modelo.
2. Diseñar una transformación no lineal de desacoplamiento para eliminar las fallas que no interesan.
3. Obtener el modelo Takagi-Sugeno del subsistema resultante.
4. Diseñar un observador para el modelo Takagi-Sugeno del paso anterior.
5. Con los estimados obtenidos formar el generador de residuales.
6. Definir una rutina que permita evaluar los residuales y decidir si alguna de las fallas está activa.

#### 4. Ejemplo de Aplicación

El sistema que se considera es un prototipo de laboratorio de tres tanques. El sistema consiste de tres tanques acoplados por un tubo, Sólo dos tanques (en los extremos del arreglo) reciben flujo. La salida del sistema está compuesta por los niveles de los tres tanques. Sólo uno de los tanques cuenta con descarga. Ver la figura 3.

Las ecuaciones que corresponden al modelo se deducen del principio de conservación de la masa:

$$a_1 \frac{dh_1}{dt} = (1 - f_{A1})q_1 - Q_{12} - Q_{L1} \quad (14.a)$$

$$a_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_{12} - Q_{23} - Q_{L2} \quad (14.b)$$

$$a_3 \frac{dh_3}{dt} = (1 - f_{A2})q_2 + Q_{23} - Q_{30} - Q_{L3} \quad (14.c)$$

Se usan transductores piezorresistivos para realizar las mediciones cuyas ecuaciones son:

$$y_1(t) = (1 + f_{s1})h_1(t) \quad (15)$$

$$y_2(t) = (1 + f_{s2})h_2(t) \quad (16)$$

$$y_3(t) = (1 + f_{s3})h_3(t) \quad (17)$$

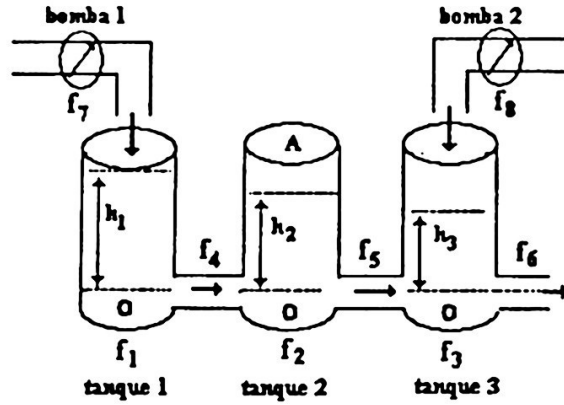


Fig. 3. Sistema de tres tanques

Al aplicar la ley de Torricelli:

$$Q_{12} = (1 - f_{B12})\mu_1 S_n \text{signo}(h_1(t) - h_2(t)) \bullet \sqrt{2g[h_1(t) - h_2(t)]}$$

$$Q_{23} = (1 - f_{B23})\mu_2 S_n \text{signo}(h_2(t) - h_3(t)) \bullet \sqrt{2g[h_2(t) - h_3(t)]}$$

$$Q_{30} = (1 - f_{B30})\mu_3 S_n \sqrt{2gh_3(t)}$$

$$Q_{L2} = f_{L2}u_L S_L \sqrt{2gh_2(t)}$$

$$Q_{L1} = f_{L1}u_L S_L \sqrt{2gh_1(t)}$$

$$Q_{L3} = f_{L3}u_L S_L \sqrt{2gh_3(t)}$$

donde  $a_i = a$  es el área transversal de cada tanque;  $Q_{ij}$  es el flujo efectivo del tanque  $i$  al tanque  $j$ ;  $Q_{Li}$  representa el flujo de fuga en cada tanque;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $S_n$  es el área de las conexiones;  $S_L$  es el área de las descargas de fuga;  $\mu_i$  es el coeficiente de descarga de cada tanque y  $\mu_L$  es el coeficiente de descarga de las fugas. Los valores numéricos de los parámetros son:

$$\mu_1 = 0.5$$

$$\mu_2 = 0.5$$

$$a = 0.01554 \text{ m}^2 \quad S_L = 8 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\mu_3 = 0.6$$

$$\mu_L = 0.7$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad S_n = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

#### 4.1 Subsistemas desacoplados

Para obtener residuales con sensibilidad selectiva a las fallas (residuales estructurados) se aplicará el método dado en [6]. Como resultado, un conjunto de subsistemas no lineales deberá ser obtenido. Cada subsistema contendrá información

acerca de un conjunto específico de fallas, como se señaló en el punto 2.2. Ver el apéndice A para el diseño del observador 2.

El primer subsistema se obtiene directamente de la ecuación diferencial para el primer tanque

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{1}{a} \left[ (1 - f_{A1})u_1 - (1 - f_{B12})\mu_1 S_n \cdot \right. \\ &\quad \left. \text{signo}(h_1 - h_2) \cdot \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2g|h_1 - h_2|} - f_{L1}\mu_L S_L \sqrt{2gh_1} \right] \\ y_1 &= (1 + f_{S1})h_1 \end{aligned} \quad (18)$$

Notar que las fallas  $f_{A1}$ ,  $f_{B12}$ ,  $f_{S1}$ ,  $f_{S2}$  y  $f_{L1}$  están involucradas en el subsistema, esto es, este subsistema es sensible a dichas faltas. La variable de estado se obtiene de la segunda salida. Esa es la razón para tener al subsistema 1 sensible también a fallas del transductor 2,  $f_{S2}$ .

De igual modo los otros dos subsistemas han sido seleccionados como la segunda y la tercera ecuaciones diferenciales del modelo original (14). La tabla 1 muestra la incidencia de cada una de las once fallas posibles en cada uno de los tres subsistemas.

Tabla 1. Sensitividad a fallas de los subsistemas

| Fallas    | Subsistemas |   |   |
|-----------|-------------|---|---|
|           | 1           | 2 | 3 |
| $f_{A1}$  | 1           | 0 | 0 |
| $f_{A2}$  | 0           | 0 | 1 |
| $f_{B12}$ | 1           | 1 | 0 |
| $f_{B23}$ | 0           | 1 | 1 |
| $f_{B30}$ | 0           | 0 | 1 |
| $f_{L1}$  | 1           | 0 | 0 |
| $f_{L2}$  | 0           | 1 | 0 |
| $f_{L3}$  | 0           | 0 | 1 |
| $f_{S1}$  | 1           | 1 | 0 |
| $f_{S2}$  | 1           | 1 | 1 |
| $f_{S3}$  | 0           | 1 | 1 |

## 4.2 Modelo Takagi-Sugeno del sistema

Para cada uno de los tres subsistemas se definen seis reglas Takagi-Sugeno. Se eligieron seis puntos de operación para definir cada una de las reglas, que se resumen en la tabla 2.

Tabla 2. Reglas para obtener el modelo Takagi-Sugeno (los valores de las celdas representan fracciones de Hmax)

| Regla | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| 1     | 0.90  | 0.80  | 0.70  |
| 2     | 0.90  | 0.80  | 0.40  |
| 3     | 0.90  | 0.50  | 0.40  |
| 4     | 0.60  | 0.50  | 0.40  |
| 5     | 0.60  | 0.20  | 0.10  |
| 6     | 0.30  | 0.20  | 0.10  |

Para definir los puntos de operación se impusieron tres condiciones:

$$h_1 > h_2 \text{ (1); } h_2 > h_3 \text{ (2) y } h_2 \leq 2h_3 \text{ (3)}$$

Las funciones de pertenencia fueron obtenidas aplicando un método analítico. Por ejemplo, el segundo término no lineal de (14) puede representarse de manera exacta usando funciones de pertenencia  $F_{21}$  y  $F_{22}$ :

$$\sqrt{h_2 - h_3} = (h_2 - h_3) \cdot [F_{21}\alpha_{21} + F_{22}\alpha_{22}] \quad (19)$$

donde

$$F_{21}, F_{22} \in [0 \ 1] \quad F_{21} + F_{22} = 1 \quad (20)$$

Resolviendo para (19) y (20)

$$F_{21} = \frac{\delta_{22} - \sqrt{h_2 - h_3}}{\sqrt{h_2 - h_3}} \cdot \frac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{21}}; \quad \alpha_{21} = \frac{1}{\delta_{21}}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{\delta_{22}}$$

$$\delta_{21} = \sqrt{(0.8 - 0.7)H_{MAX}}$$

$$\delta_{22} = \sqrt{(0.8 - 0.4)H_{MAX}} \text{ donde } H_{MAX} = 0.64\text{m.}$$

Notar que las ecuaciones recién vistas son la representación exacta de la no linealidad porque se siguió el procedimiento de [8]. La representación gráfica de estas dos funciones de pertenencia se muestra en la figura 4.

Las matrices de estado del sistema se calculan como sigue (se muestra sólo la matriz de estado del subsistema 3):



$$A_3 = \begin{bmatrix} -\mu_1 S_n \alpha_{12} & \mu_1 S_n \alpha_{12} & 0 \\ \mu_1 S_n \alpha_{12} & \mu_1 S_n \alpha_{12} - \mu_2 S_n \alpha_{21} & \mu_2 S_n \alpha_{21} \\ 0 & \mu_2 S_n \alpha_{21} & \mu_2 S_n \alpha_{21} - \mu_3 S_n \alpha_{32} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{2g}}{a}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.0142 & 0.0142 & 0 \\ 0.0142 & -0.0426 & 0.0284 \\ 0 & 0.0284 & -0.0455 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Matriz de salida:  $C_i = C = I_3$ ; ( $i = 1, \dots, 6$ )

$$\text{Matriz de control: } B_i = B = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}^T ; (i = 1, \dots, 6)$$

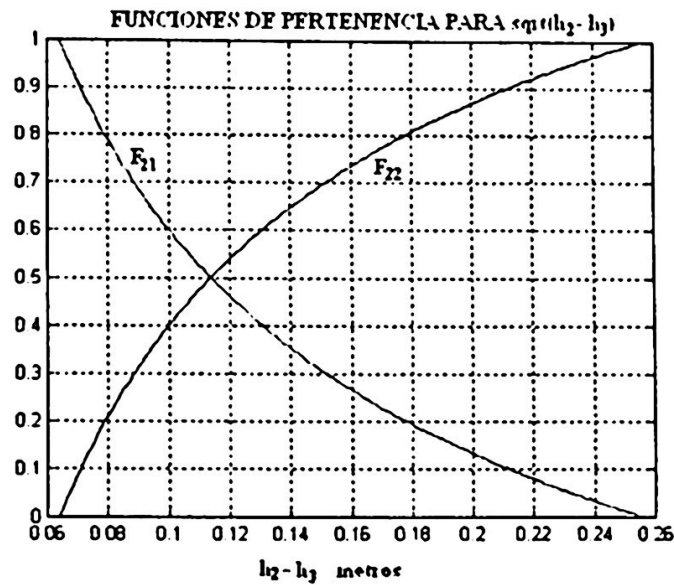


Fig. 4. Funciones de pertenencia para la variable premisa  $z_2 = h_2 - h_3$ .

Tabla 3. La verdad de cada regla es el mínimo de sus funciones dividido por la suma de todos los mínimos.

| Regla | Funciones de pertenencia |          |          |
|-------|--------------------------|----------|----------|
| 1     | $F_{11}$                 | $F_{21}$ | $F_{33}$ |
| 2     | $F_{11}$                 | $F_{22}$ | $F_{32}$ |
| 3     | $F_{12}$                 | $F_{21}$ | $F_{32}$ |
| 4     | $F_{11}$                 | $F_{21}$ | $F_{32}$ |
| 5     | $F_{12}$                 | $F_{21}$ | $F_{31}$ |
| 6     | $F_{11}$                 | $F_{21}$ | $F_{31}$ |

### 4.3 Resultados

El modelo del sistema de los tres tanques usado fue además controlado de modo difuso empleando el algoritmo difuso (PDC). El controlador y los observadores usan las mismas reglas del modelo. Las condiciones iniciales para el sistema ya descrito fue  $x(0) = [0.24 \ 0.20 \ 0.10]^T$ . Las corridas se hicieron llevando al sistema al punto de operación  $x_r = [0.48 \ 0.40 \ 0.32]^T$ . Notar que la elección de los puntos de operación inicial y final acentúa la naturaleza no lineal del sistema.

Para probar el método propuesto diferentes escenarios fueron considerados. Primero, el caso libre de fallas se usó para probar los valores de los residuales. En este caso los residuales tienen muy poca magnitud, casi cero, y el valor de estado permanente se aprecia en la tabla 4

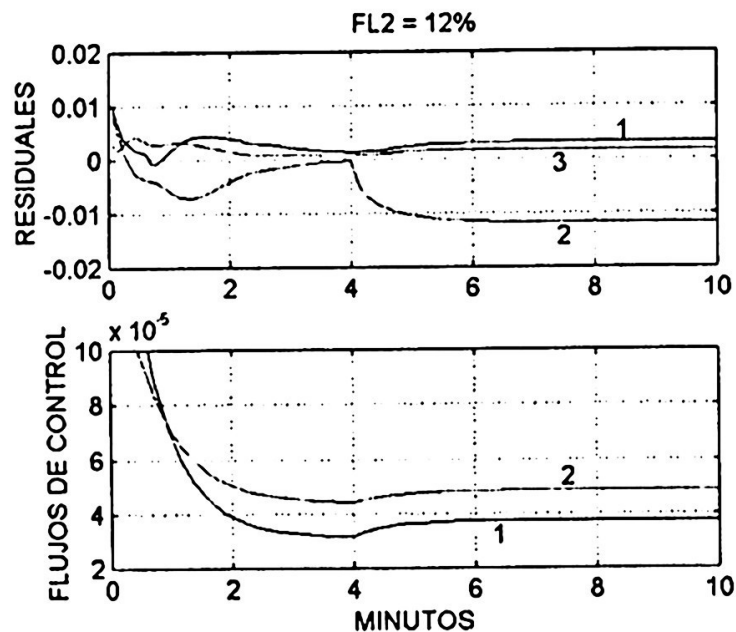


Fig. 5. Respuesta de residuales para  $FL_2$  de 12%. Las fallas fueron introducidas en el minuto 4, una a la vez.

En la figura 5 se ilustra la respuesta de los residuales para una fuga en el tanque 2. La magnitud de la falla fue de 12%. El residual 2 es activado, mostrando efecto de la falla, de acuerdo con la tabla 1.

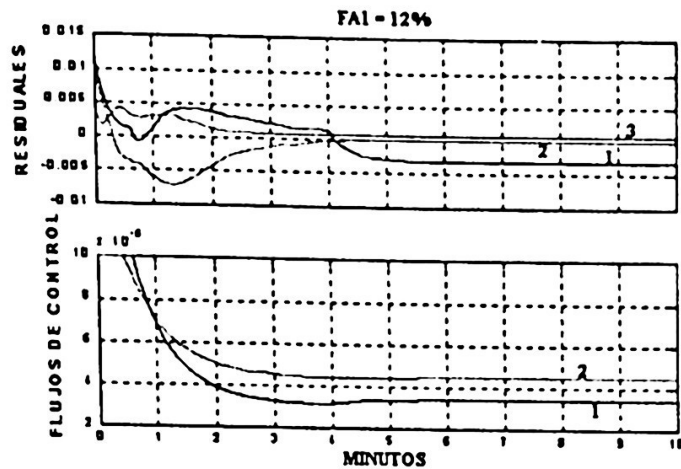


Fig. 6. Respuesta de residuales para  $F_{A1}$  de 12%.

La figura 6 exhibe la respuesta de los residuales a una falla en la bomba 1. Al igual que el caso anterior la magnitud de la falla es de 12%. El residual 1 es el único activado, de acuerdo con la teoría de la tabla 1.

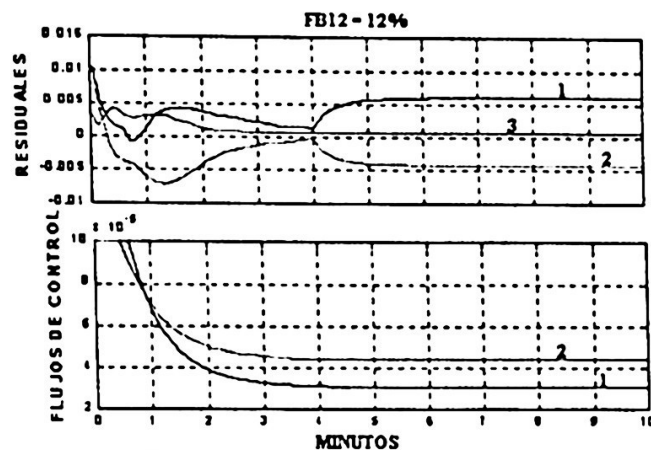


Fig. 7. Respuesta de residuales para  $F_{B12}$  de 12%.

Un último caso se muestra en la figura 7. Una falla de bloqueo entre los tanques 1 y 2 de 12 % activa los residuales 1 y 2, también consecuente con la tabla 1. El transitorio inicial que se aprecia en las gráficas para cada caso se debe a que el estimado inicial de cada variable de estado se puso como 95% del valor inicial de cada variable de estado.

Tabla 4: Valores de estado permanente de los residuales para diversas fallas

| Falla     | $r_1$   | $r_2$   | $r_3$  |
|-----------|---------|---------|--------|
| $F_{L2}$  | 0.0032  | -0.0118 | 0.0018 |
| $F_{A1}$  | -0.0030 | 0.0000  | 0.0007 |
| $F_{S3}$  | 0.0008  | -0.0086 | 0.0081 |
| $F_{B12}$ | 0.0061  | -0.0042 | 0.0009 |
| BIEN      | 0.0009  | -0.0000 | 0.0007 |

La tabla 4 resume el valor permanente de los residuales para las cinco corridas efectuadas; cuatro de ellas con una falla y una corrida con el sistema libre de fallas. Los residuales activados se muestran en negrita para las corridas con una falla.

## 5. Conclusiones

En el presente trabajo el problema de la detección y el aislamiento de fallas usando desacoplamiento no lineal y observadores difusos Takagi-Sugeno ha sido abordado. El desacoplamiento no lineal se utiliza para garantizar una sensibilidad específica para fallas determinadas. Los subsistemas desacoplados son a menudo marcadamente no lineales.

Los observadores difusos (basados en un modelo Takagi-Sugeno) son una buena manera para construir un observador para tales casos. Con el problema de la observación resuelto el diseño del esquema de detección y aislamiento de fallas deja de ser una tarea complicada. El esquema propuesto está siendo probado en un sistema de laboratorio de tres tanques.

El control y la estimación de sistemas no lineales mediante el diseño con LMIs representa el nuevo paradigma a aplicar en sistemas marcadamente no lineales.

## Referencias

- [1] E. Alcorta-García y P. M. Frank "Multiplicative fault isolation in linear systems", Proc. Of the Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, DEC. 1999.
- [2] P. Balle "Fuzzy Model based parity equations for fault isolation", Control Engineering Practice, 7:261-270, 1999.
- [3] P. M. Frank "Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge based redundancy- a survey", Automatica, 26:459-474, 1990
- [4] P. M. Frank. Analysis and qualitative model-based fault diagnosis – a survey and some new results. European Journal of Control, 2(1):6–28, 1996.
- [5] C. J. Lopez-Toribio, R. J. Patton, C. Batt, and J. Chen. Fault diagnosis of the three tank system using fuzzy multiple inference modelling. In European Control Conference, page CD, September 1999.
- [6] R. Seliger and P. M. Frank. Fault diagnosis by disturbance decoupled nonlinear observers. In Proc. of the CDC '91, Brighton, England, pages 2248–2253, Dec. 1991.
- [7] M. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 15(1):116–132, 1988.
- [8] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. Wang. "Robust stabilization of a class of uncertain non-linear system via fuzzy control". IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 4:1–13, Feb. 1996.

- [9] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. Wang. "Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs". IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 6(2):250–265, May. 1998.
- [10] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin. "Parallel distributed compensation of a nonlinear system by Takagi-Sugeno models". In IEEE-IFES, pages 531–538, 1995.

## Apéndice A: Observador del 2º subsistema

Como ya se dijo, los tres observadores usan las mismas reglas que el modelo difuso y el regulador difuso. Para el segundo subsistema la  $i$ -ésima regla se puede expresar como:

Regla  $i$  del observador 2 ( $i = 1, \dots, 6$ )

$$\text{IF } z(t) \text{ es } M_i \text{ THEN } \begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = a_{2i} \bar{x}_2(t) + b_{2i} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} + L_{2i}(y_2 - \bar{y}_2) \\ \bar{y}_2(t) = \bar{x}_2(t) \end{cases}$$

Notar que  $y_1$  y  $y_3$  entran como señales de control. Las ecuaciones para el observador se derivan de la suma ponderada dada en (8) y son:

$$\dot{\bar{x}}_2 = \sum_{i=1}^6 \omega_i [z(t)] \left\{ a_{2i} \bar{x}_2 + b_{2i} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} + L_{2i} (y_2 - \bar{y}_2) \right\} \bar{y}_2 = \bar{x}_2$$

Se diseñó el observador con el toolbox LMI de MATLAB, formando el conjunto de 47 LMIs para (9), (10), (12) y (13) con  $v = 1.2H_{\max}$ , que se resolvió con el comando de eigenvalores generalizados:

`[to,xo]=gevp(LOPEZ,19,[0 190 2e11 25 0],[.],[.],-3.25);`

que tras 15 iteraciones produjo  $P = 23.14$ ,  $Q = 2.210$  y un valor de tasa de decaimiento de  $4.843 \text{ min}^{-1}$ , quedando las ganancias, calculadas con (11), para las seis reglas como sigue:

| Regla    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $L_{2i}$ | 2.219 | 2.547 | 2.547 | 2.491 | 2.448 | 2.371 |

Además:  $a_{2i} = A_{i(2,2)}$  y  $b_{2i} = [A_{i(2,1)} \quad A_{i(2,3)}]$  y la premisa es:  
 $z(t) = [h_1 - h_2 \quad h_2 - h_3 \quad h_3]^T$

Notar que la regla 1 y la regla 5 nunca se disparan al mismo tiempo pues si  $F_{31}$  es diferente de cero  $F_{33}$  será cero y viceversa; y que lo mismo sucede para las reglas 1 y 6, por lo que estas dos parejas no se incluyen en los LMIs de (10), por lo que éstos son sólo trece.

